CONTROLODOR ROBUSTO PARA UM SISTEMA DE TANQUES ACOPLADOS

Eduardo Pereira Vieira[1]

RESUMO

O presente trabalho consiste na utilização de técnicas avançadas para projetar um controlador robusto para realização do controle de nível de um sistema de tanques acoplados. O critério de desempenho adotado no projeto do controlador é o da *D*-estabilidade, a qual deriva da teoria da estabilidade de Hurwitz, bem como da teoria de Lyapunov. O projeto do controlador bem como os seus testes foram realizados tendo como base um modelo no espaço de estados, o qual foi previamente obtido.

Palavras-chave: Controle Robusto, Espaço de Estados, Estabilidade.

ABSTRACT

The present work consists in the use of advanced techniques to design a robust controller for level control of a system of coupled tanks. The performance criterion adopted in the controller design is that of D-stability, which derives from Hurwitz's theory of stability as well as that of Lyapunov. The design of the controller and its tests were performed based on a state space model, which was previously obtained.

***Keywords**: Robust Control, State Space, Stability.*

1. INTRODUÇÃO

O primeiro passo na concepção de um controlador é a obtenção de um modelo matemático para o sistema de controle com base em leis físicas. Diante desta condição surge um entrave importante quanto à modelagem do sistema: não importa o quanto um modelo seja bem detalhado, ele jamais será uma representação precisa de um sistema real e consequentemente será uma fonte de incertezas [1].

[1] Mestrando em Engenharia Elétrica pelo PPGEL - Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica da Associação Ampla entre a Universidade Federal de São João Del-Rei - UFSJ e o Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais - CEFET-MG. Graduado em Engenharia de Telecomunicações pela Universidade Federal de São João Del-Rei - UFSJ, Campus Alto Paraopeba. E-mail: eduardopereiravieira@yahoo.com.br

Uma das propostas da síntese de controladores robustos é lidar com problemas deste tipo. No projeto são feitas considerações sobre variações de parâmetros ou configurações do modelo e os ganhos do controlador são encontrados de forma a satisfazer requisitos mínimos de desempenho e que mantenham o sistema estável [1].

Neste trabalho é abordado um sistema MIMO (*Multiple-Input Multiple-Output*) de tanques acoplados. Este tipo de sistema é comum em várias aplicações na indústria, sendo, portanto, apto para investigação de problemas práticos da área de controle no ambiente didático. Seguindo as equações diferenciais que descrevem o comportamento de sistemas de nível de líquidos, foi obtido um modelo no espaço de estados para análise do comportamento do sistema em questão, bem como para o projeto do controlador. Optou-se pelo modelo de espaço de estados pelo fato do mesmo ser adequado a sistemas MIMO e também por possibilitar projetos de controladores utilizando técnicas avançadas [2].

O critério de estabilidade adotado neste trabalho é o da *D*-estabilidade. O conceito da *D*-estabilidade é uma generalização da estabilidade de Hurwitz e da estabilidade de Schur. Desta forma, são apresentadas condições de LMI (*Linear Matrix Inequalities*) que garantem a estabilidade de uma matriz de estados em uma dada *D*-região [3].

Na sequencia do trabalho é apresentada primeiramente uma revisão da literatura sobre *D*-estabilidade e sobre a lei de controle de realimentação de estados $u = Kx$. Posteriormente é feita a modelagem do sistema no espaço de estados. Por fim são apresentados os experimentos realizados e os resultados obtidos, os quais são seguidos pela conclusão do trabalho.

2. REVISÃO DA LITERATURA

Considere o seguinte sistema linear continuo no tempo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \tag{1}$$

com $A \in IR^{n \times n}$. O sistema (1) é estável de acordo com a teoria de estabilidade de Lyapunov, ou equivalente, estabilidade de Hurwitz da matriz *A,* se e somente se existir uma matriz $P \in S^n$, tal que as seguintes LMIs são satisfeitas:

$$\begin{cases} P > O \\ A^T P + PA < 0, \end{cases} \tag{2}$$

onde P é uma matriz simétrica definida positiva.

Seja *D* um domínio no plano complexo, que é simétrico em relação ao eixo real. Então, uma matriz $A \in IR^{n \times n}$ é *D*-estável se:

$$\lambda_i(A) = \in D, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{3}$$

Um caso típico de *D*-estabilidade, o mesmo que será abordado neste trabalho, consiste na condição (4) e requer que todos os autovalores da matriz *A* estejam localizados na região mostrada na Figura 1.

$$D = H_{\alpha,\beta} = \{x + jy \mid -\beta < x < -\alpha\} \tag{4}$$

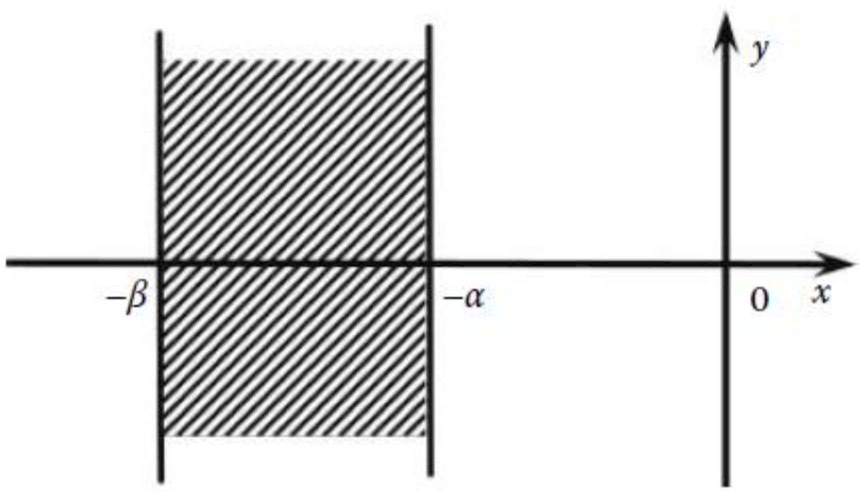

Figura 1 - Região Hα,β [3]

Desta forma, a matriz $A \in IR^{n \times n}$ é $H_{\alpha,\beta}$ estável se e somente se existir uma matriz $P \in S^n$ que satisfaça as LMIs (5).

$$\begin{gathered} P > 0 \\ A^T P + PA + 2\alpha P < 0 \\ A^T P + PA + 2\beta P > 0 \end{gathered} \tag{5}$$

A condição para a matriz $A \in IR^{n\times n}$ ser $H_{\alpha,\beta}$ estável é equivalente ao fato que ambos *(A + αI)* e −*(A + βI)* são Hurwitz estável. De acordo com a Teoria de Estabilidade de Lyapunov, *(A+αI)* é Hurwitz estável se e somente se para qualquer $Q > 0$, existir uma matriz $P_\alpha \in S^n$, $P_\alpha > 0$, tal que:

$$(A + \alpha I)^T P_\alpha + P_\alpha (A + \alpha I) = -Q; \tag{6}$$

Que pode ser convertida para:

$$A^T P_\alpha + P_\alpha A = -2\alpha P_\alpha - Q. \tag{7}$$

Enquanto −*(A+βI)* é Hurwitz estável se e somente se existir $P_\beta \in S^n$, $P_\beta > 0$, tal que:

$$(-A - \beta I)^T P_\beta + P_\beta (-A - \beta I) = -Q; \tag{8}$$

Que pode ser convertida para:

$$A^T P_\beta + P_\beta A = -2\beta P_\beta + Q. \tag{9}$$

Somando (7) e (9) resulta na Equação (10):

$$A^T\left(P_\alpha + P_\beta\right) + \left(P_\alpha + P_\beta\right)A = -2\alpha P_\alpha - 2\beta P_\beta \qquad (10).$$

Seja:

$$P = P_\alpha + P_\beta > 0, \tag{11}$$

Fato que leva a Equação (10) a seguinte forma:

$$A^T P + PA = -2\alpha P_\alpha - 2\beta P_\beta. \tag{12}$$

Que significa:

$$A^T P + PA + 2\alpha P = 2(\alpha - \beta) P_\beta, \tag{13}$$

$$A^T P + PA + 2\beta P = 2(\beta - \alpha) P_\alpha. \tag{14}$$

Então desde que $\alpha - \beta < 0$, (5) é satisfeita.

Ganho do Controlador

Conforme apresentado em (Duan & Yu, 2013), considerando a lei de controle de realimentação de estados $u = Kx$ tal que o sistema (1) em malha fechada seja dado por:

$$\dot{x} = (A + BK)x. \tag{15}$$

Onde K representa o ganho do controlador. De acordo com a condição (5), o sistema é $H_{\alpha,\beta}$ estável se e somente se existir uma matriz positiva simétrica P que satisfaça as seguintes condições:

$$(A + BK)P + P(A + BK)^T + 2\alpha P < 0 \tag{16}$$

$$-(A + BK)P - P(A + BK)^T - 2\beta P < 0 \tag{17}$$

Baseado nesta observação, o seguinte resultado é obtido:

$$AP + PA^T + BW + W^T B^T + 2\alpha P < 0 \tag{18}$$

$$-AP - PA^T - BW - W^T B^T - 2\beta P < 0 \tag{19}$$

E neste caso o ganho do controlador é dado por:

$$K = WP^{-1} \tag{20}$$

3. OBTENÇÃO DO MODELO NO ESPAÇO DE ESTADOS

Considere o sistema de tanques acoplados mostrada na Figura 2, abordado em (Ogata, 1997, p.121). Onde C_1 e C_2 representam as capacitâncias dos tanques, os quais são idênticos, e R_1 e R_2 as resistências impostas ao fluxo pelas respectivas válvulas.

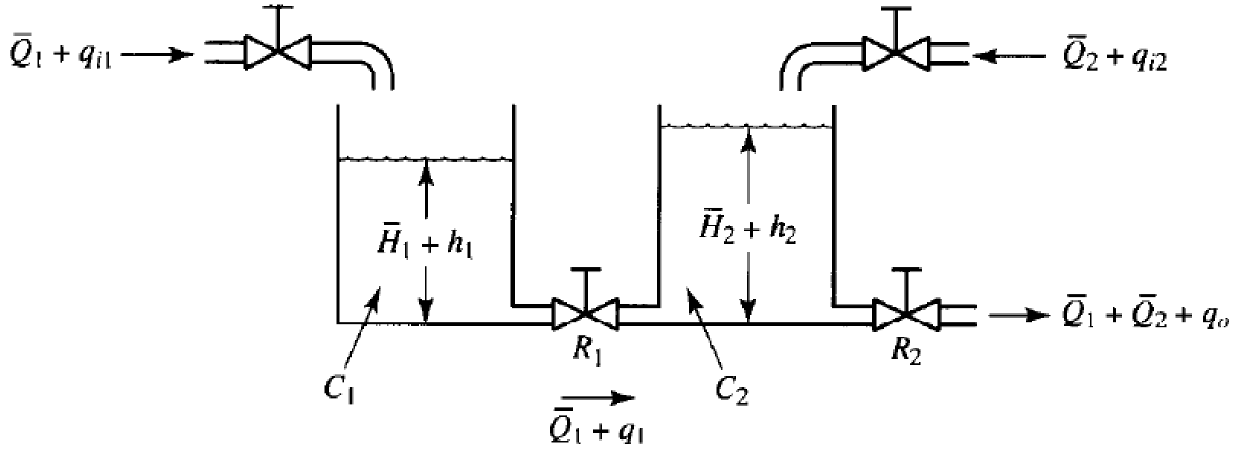

Figura 2 - Sistema de Tanques Acoplados [2]

No sistema em questão, h_1 e h_2 são as saídas e q_{i1} e q_{i2} as entradas. As equações que descrevem o comportamento deste sistema são:

$$C_1 dh_1 = (q_{i1} - q_1)dt \tag{21}$$

$$\frac{h_1 - h_2}{R_1} = q_1 \tag{22}$$

$$C_2 dh_2 = (q_1 - q_0)dt \tag{23}$$

$$\frac{h_2}{R_2} = q_0 \tag{24}$$

A substituição da Equação (22) na (21), resulta na seguinte equação:

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{C_1}\left(q_{i1} - \frac{h_1 - h_2}{R_1}\right) \tag{25}$$

Agora substituindo as Equações (22) e (24) na (23), tem-se o seguinte resultado:

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{C_2}\left(\frac{h_1 - h_2}{R_1} - \frac{h_2}{R_2}\right) \tag{26}$$

Definindo as variáveis de estado x_1 e x_2 como:

$$x_1 = h_1$$

$$x_2 = h_2.$$

As variáveis de entrada u_1 e u_2 como:

$$u_1 = q_{i1}$$

$$u_2 = q_{i2}.$$

E as variáveis de saída y_1 e y_2 como:

$$y_1 = h_1 = x_1$$

$$y_2 = h_2 = x_2.$$

As Equações (25) e (26) podem ser escritas como:

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{R_1C_1}x_1 + \frac{1}{R_1C_1}x_2 + \frac{1}{C_1}u_1 \tag{27}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{R_1C_2}x_1 - \left(\frac{1}{R_1C_2} + \frac{1}{R_2C_2}\right)x_2 + \frac{1}{C_2}u_2 \tag{28}$$

E na forma padrão de representação vetor-matriz, tem-se:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{R_1C_1} & \frac{1}{R_1C_1}\\ \frac{1}{R_1C_2} & -\left(\frac{1}{R_1C_2}+\frac{1}{R_2C_2}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{1}{C_1} & 0\\ 0 & \frac{1}{C_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}, \tag{29}$$

que é a equação de estados, e

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}, \tag{30}$$

a qual é a equação de saída.

É interessante ressaltar que na obtenção da equação de estados, o tipo de fluxo do líquido presente no sistema foi considerado como laminar.

Após a obtenção do modelo no espaço de estado, é necessário definir valores numéricos para as variáveis. Os valores adotados neste trabalho foram definidos aleatoriamente e tendo como base experimentos realizados em (Izquieta, 2011). Os valores admitidos para as capacitâncias dos tanques e para as resistências das válvulas estão especificados abaixo:

$$C_1 = C_2 = 72,25cm^2$$

$$\boldsymbol{R_1 = 0,0055}$$

$$\boldsymbol{R_2 = 0,0109}$$

Para estes valores a equação de estados fica da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{-2.5204} & \mathbf{2.5204} \\ \mathbf{2.5204} & \mathbf{-3.7939} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0,0138} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0,0138} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u_1} \\ \boldsymbol{u_2} \end{bmatrix} \tag{31}$$

4. EXPERIMENTOS E RESULTADOS

Os experimentos e cálculos para obtenção do controlador foram realizados no software MATLAB.

Conforme o código abaixo, primeiramente o modelo do sistema no espaço de estados (31) foi declarado; em seguida foi realizada uma simulação deste sistema em malha aberta, para isto foi definido um estado inicial $x_0 = [0.8\ 0.7]'$ e gerada uma onda quadrada para fazer a função do sinal de perturbação. Esta primeira simulação foi realizada através da função *lsim*.

```
>> A = [-2.5204 2.5204; 2.5204 -3.7939];
>> B = [0.0138 0.0000; 0.0000 0.0138];
>> C = [1 0; 0 1];
>> D = [0 0; 0 0];
>> modelo = ss(A,B,C,D);
>> xo = [0.8; 0.75];
>> [u1,t] = gensig('square',5,40,0.1);
>> u2 = u1;
>> u = [u1 u2];
>> lsim(modelo,u,t,xo)
```

O resultado da simulação do sistema em malha aberta é mostrado na Figura 3. É possível perceber que por natureza o sistema apresenta certo grau de estabilidade, mas ainda assim é possível notar que, dado um estado inicial, ele gasta um intervalo de tempo relevante até atingir o ponto de equilíbrio e também que o sinal de perturbação é capaz de gerar oscilações nas saídas do sistema.

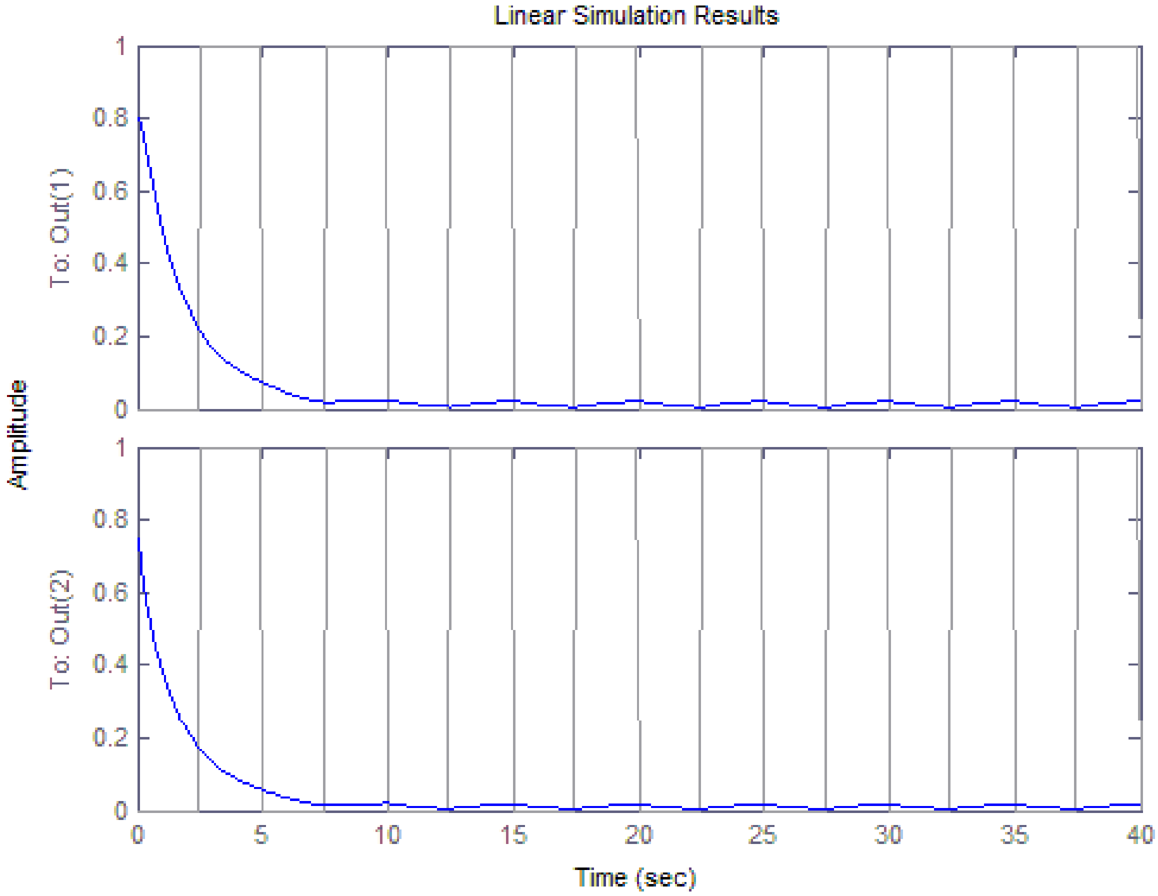

Figura 2 - Resposta do Sistema em Malha Aberta

Para o projeto do controlador, foi considerada uma folga de 1% em cima dos autovalores da matriz *A*, e desta forma a região *D* ficou definida da seguinte forma:

$$D = H_{\alpha,\beta} = \{x + jy \mid -5{,}814267 < x < -0{,}552024\}$$

A fim de obter um controlador capaz de tornar o sistema $H_{\alpha,\beta}$ estável, o projeto do mesmo foi baseado nas LMIs (16) e (17). Inicialmente foi obtida a matriz *P* por meio do solver SeDuMi, o qual foi interfaceado pelo YALMIP (*Yet Another LMI Parser*). Posteriormente foram obtidos os ganhos do controlador, conforme a Equação (20). Todo esse processo foi realizado através do seguinte código:

```
P = sdpvar(2,2); W = sdpvar(2,2);
lmis = set(P > 0) + set(A*P + P*A'+ B*W + W'*B' + 2*alpha*P < 0) + set( -A*P - P*A'- B*W - W'*B' - 2*beta*P < 0);
opcoes = sdpsettings('verbose', 0, 'warning', 0, 'solver', 'sedumi');
solvesdp(lmis,[],opcoes);
[r,d] = checkset(lmis);
        if sum(r < 0) == 0
         disp('O sistema pode ser controlado')
         P = double(P)
         W = double(W);
         K = W*inv(P)
         else
          disp('O sistema NÃO pode ser controlado')
        end
```

$$P = \begin{bmatrix} 0.2603 & 0 \\ 0 & 0.2603 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} -48.0250 & -182.6378 \\ -182.6376 & 44.2576 \end{bmatrix}$$

A sequência do experimento consistiu na simulação da resposta do sistema em malha fechada, conforme a Equação (15). Para esta simulação também foi definido um estado inicial $x_0 = [0.8\ 0.7]$ e gerada uma onda quadrada para fazer o papel do sinal de perturbação. Tal simulação foi realizada através do seguinte código:

```
>> Acl = A+B*K;
>> modelo = ss(Acl,[],C,D);
>> xo = [0.8; 0.75];
>> [u1,t] = gensig('square',5,40,0.1);
>> u2 = u1;
>> u = [u1 u2];
>> lsim(modelo,u,t,xo)
```

A resposta do sistema em malha fechada é mostrada na Figura 4. É possível notar que o sistema busca o ponto de equilíbrio com mais agilidade e é bem mais estável quando está sujeito as perturbações.

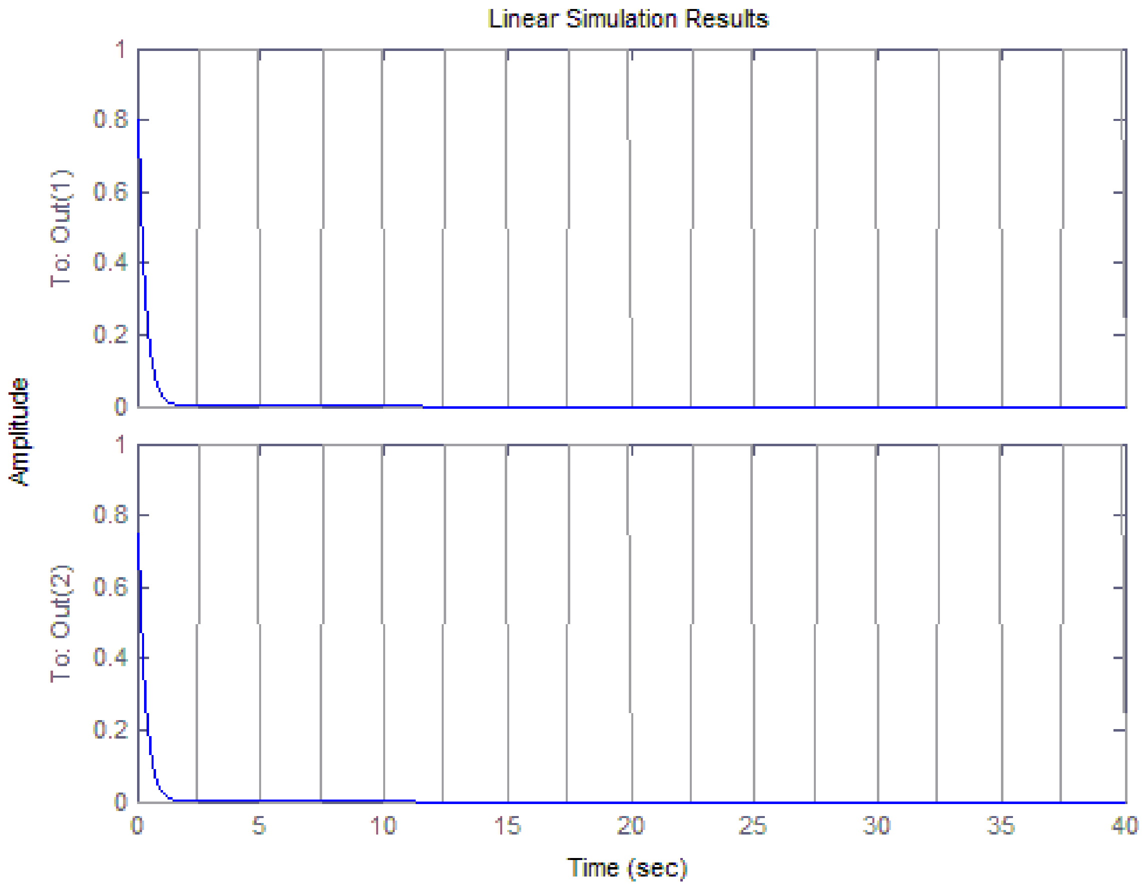

Figura 3 - Resposta do Sistema em Malha Fechada

5. CONCLUSÃO

Comparando a resposta do sistema em malha aberta com a resposta do mesmo em malha fechada, é possível concluir que o controlador projetado melhorou consideravelmente o comportamento do sistema.

As grandes virtudes do controlador robusto proposto para o sistema em questão são a sua capacidade de reduzir consideravelmente o tempo de estabilização do sistema dado um estado inicial e o seu desempenho frente às perturbações que o sistema está sujeito.

Sendo assim, é possível concluir que o critério da *D*-estabilidade garante o bom desempenho do controlador e que este conceito pode ser muito útil em outras aplicações de sistemas. Vale também ressaltar que outros tipos de regiões *D*-estáveis podem ser exploradas a fim de proporcionar mais robustez ao sistema de controle.

Também é interessante ressaltar a eficiência das técnicas de controle moderno, como a própria modelagem no espaço de estados bem como a *D*-estabilidade, frente às técnicas de controle clássico. Embora a aplicação destas técnicas demande mais conhecimento sobre o sistema que será controlado, a assertividade e precisão do projeto garantem um controlador com ótimo desempenho, pois o sistema é tratado como um todo e não apenas com base na sua saída.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ogata, K. **Engenharia de Controle Moderno**. 5°Ed, Pearson Educación, S.A., Madrid, 2010.

Ogata, K. **Engenharia de Controle Moderno**. 3°Ed, Prentice Hall, UpperSaddle River, New Jersey, 1998.

Guang-Ren Duan, Hai-Hua Yu. **LMIs in Control Systems Analysis, Design and Applications**. CRC Press Taylor & Francis Group, 2013.

Sara Pérez Izquieta. **Control De Tanques Acoplados**. Escuela Tecnica Superior de Ingenieros Industriales y de Telecomunicacion. Pamplona, 28 de Junio de 2011.